

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

5p c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)$.

5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .

5p b) Să se calculeze $\int_0^\pi f(x) \cos x \, dx$.

5p c) Să se calculeze derivata funcției $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t) \, dt$.