

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră funcția  $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n + \ln x$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f_2$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .

5p b) Să se arate că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , ecuația  $f_n(x) = 0$  are exact o rădăcină reală, situată în intervalul  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ .

2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[-2\pi, 2\pi]$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$ .

5p c) Să se arate că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$ .