

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

5p a) Să arate că $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$.

5p b) Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p c) Să se arate că funcția f nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} axe^x - x, & x \leq 0 \\ x \cos x + b, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se determine a și b știind că funcția f este primitivă pe \mathbb{R} a unei funcții.

5p b) Știind că $a = 0$ și $b = 0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.

5p c) Să se arate că, dacă $b = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} x^n f(x) dx = -\infty$.