

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

5p a) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -2)$.

5p b) Să calculeze limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$.

5p c) Să se arate că există un punct $c \in (1, 2)$ astfel încât $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$.

2. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p b) Să se arate că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$.