

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.

5p b) Să se arate că  $f(x) \geq 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

5p c) Să se demonstreze că, dacă  $f(x) \geq mx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , atunci  $m = 2$ .

2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin^3 x \cos x$  și  $F$  o primitivă a funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

5p a) Să arate că există  $c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $4F(x) = \sin^4 x + c$ .

5p b) Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției  $f$  la intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x) dx = 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .