

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții

$$M = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă și } f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

5p

a) Să se arate că funcția $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = e^x \sin x$ aparține mulțimii M .

5p

b) Să se arate că, dacă $f \in M$ și $f(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p

c) Să demonstreze că, dacă $f \in M$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$ și $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p

a) Să se arate că $g(x) = \ln(1+x)$.

5p

b) Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p

c) Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.