

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ .

5p a) Să se studieze derivabilitatea funcției  $f$  în origine.

5p b) Să arate că, pentru orice  $k \in (0, \infty)$ , există  $c \in (k, k+1)$  astfel încât  $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ .

5p c) Să se demonstreze că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$ , este strict descrescător.

2. Fie funcția  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$ , unde funcția  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in [0, +\infty)$ .

5p c) Să se arate, folosind eventual funcția  $f$ , că  $\int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{5}{12}$ .