

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se definește funcția  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = e^{2x}$  și, pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ , se definește funcția  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ .

5p a) Să se arate că  $f_3(x) = 8e^{2x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să determine asimptotele graficului funcției  $f_n$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$ , unde  $a$  este un număr real.

2. Fie funcția  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \ln^2 x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[0, 1]$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ .