

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^2 t^x dt$.

5p a) Să se verifice că $1 + (x+1)F(x) = 2^{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} F(x)$.

5p c) Să se arate că există o funcție continuă $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $F(x) = 1 + \int_0^x f(y) dy$, $\forall x \in (-1, \infty)$.