

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ .

5p a) Să se determine ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

5p c) Să se demonstreze că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(-\infty, -1)$ .

2. Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  se consideră funcția  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = |\sin nx|$  și numărul  $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$ .

5p b) Să se arate că  $I_n \leq \ln 2$ .

5p c) Să se arate că  $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ .