

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și funcția  $f : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^x$ .

5p b) Să se determine valoarea numărului  $a$  știind că 3 este punct de extrem local al funcției  $f$ .

5p c) Să se determine valoarea numărului  $a$  știind că graficul funcției  $f$  are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția  $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$  și, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , se definește funcția  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

5p a) Să se arate că  $f_1^2(x) = 2f_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$ .

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției  $g : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ ,  
 $g(x) = f_1(x) \sin x$  în jurul axei  $Ox$ .