

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ și funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x$.

5p a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p b) Să se demonstreze că $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$.

5p c) Să se demonstreze că $2f(x+y) \leq f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$.

2. Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x] dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

5p c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \int_0^n f(x) dx$, este convergent.