

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

5p c) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xe^x - 1}{x - x_0} = f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul b).

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x + 1} dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine I_1 .

5p b) Să se arate că șirul I_n este strict descrescător.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t) \leq t$, $\forall t \in (-1, \infty)$).