

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p b) Să se arate că $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.