

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sqrt{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$.

5p a) Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

5p b) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p c) Să se studieze derivabilitatea funcției f .

2. Se consideră funcțiile $f_n: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{\cos^n x + \sin^n x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f_1(x)} dx$.

5p b) Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4 , atunci $F''(x) = (f_4(x))^2 \sin 4x$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5p c) Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x f_1(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x f_1(x) dx = \frac{\pi-1}{4}$.