

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare.

5p b) Să se studieze convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f(x+1) - f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{3-x}$  și  $g(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$ ,  $\forall x \in (0, 3)$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_1^e (3-x)f(x)dx$ .

5p b) Să se arate că  $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 g(x)dx$ .

5p c) Să se arate că  $\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 g(x)dx = +\infty$ .