

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a > 0$ se consideră funcția $f_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x + a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

5p a) Să se calculeze $f'_a(x)$, $x > 0$.

5p b) Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.