

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcției f_1 .

5p b) Să se demonstreze că funcțiile $g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = f_n(x) + f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p c) Admitem că ecuația $f_n(x) = 2^n$ are soluția unică x_n . Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la 2.

2. Fie $a \in [0, 1]$ și $I_n = \int_0^a \frac{t^n}{t+1} dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se demonstreze că $I_n + I_{n-1} = \frac{a^n}{n}$, $\forall n \geq 2$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.