

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p b) Să se arate că $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \arctg \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2} \right)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}, I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n \geq 2$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.