

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $[0, \infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (f(x+1) - f(x))$ .

5p c) Să se rezolve inecuația  $f(x) < x - \frac{x^3}{3}, x \in \mathbb{R}$ .

2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$ .

5p b) Să se arate că funcția  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x t^4 f(t)dt$  este strict crescătoare.

5p c) Să se arate că, pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ , are loc relația  $\int_1^a f(x)dx < \frac{1}{4}$ .