

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ se definește funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - nx - 1$.

5p a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p b) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, g(x) = \int_{-x}^x f(t) \cos t \, dt$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \, dx$.

5p b) Să se studieze monotonia funcției g pe intervalul $[0, \pi]$.

5p c) Să se calculeze $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.