

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

5p a) Să se calculeze $A^2 + A$.

5p b) Știind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se rezolve ecuația $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$.

5p c) Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + \dots + A^{2009}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4 .

5p a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.

5p c) Pentru $m = 1$ și $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.