

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se verifice că $AB = BA$.

5p b) Să se calculeze $A^2 + B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $B^2 = B \cdot B$.

5p c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$ și $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.

5p a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .

5p b) Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.