

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 = 1 \right\}$.

5p a) Să se verifice dacă matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G .

5p b) Să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.

5p c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G .

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ și suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

5p a) Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = -2$.

5p b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

5p c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.