

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și funcția  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,

$$f(X) = X^2 - 3X + I_3, \text{ unde } X^2 = X \cdot X.$$

**5p** a) Să se calculeze  $\det(I_3 + B)$ .

**5p** b) Să se demonstreze că  $f(A) = I_3 + B$ .

**5p** c) Să se arate că  $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$ , unde  $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$ .

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție  $x * y = x + y - 3$  și  $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ .

**5p** a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația  $x \circ x = x * x$ .

**5p** b) Să se determine numărul întreg  $a$  care are proprietatea că  $x \circ a = 3$ , oricare ar fi numărul întreg  $x$ .

**5p** c) Să se rezolve sistemul de ecuații  $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{Z}$ .