

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ .

**5p** a) Să se calculeze  $A^2$ .

**5p** b) Să se verifice că  $A^2 = aI_2 + bA$ .

**5p** c) Știind că  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  și  $AX = XA$ , să se arate că există  $m, n \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $X = mI_2 + nA$ .

2. Se consideră polinomul  $f = X^4 + aX^3 - X - 1$ , unde  $a \in \mathbb{Z}$ .

**5p** a) Să se determine  $a$  știind că  $x=1$  este rădăcină a polinomului  $f$ .

**5p** b) Pentru  $a=1$  să se determine rădăcinile reale ale polinomului  $f$ .

**5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \neq 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .