

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

5p b) Să se demonstreze că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A + B \in \mathcal{M}$.

5p c) Să se arate că $\det(I_2 - A(0,b)) \neq 0$, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p a) Pentru $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = (X + \hat{2})^2(X + \hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.

5p b) Dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.

5p c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}) = \hat{0}$.