

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB .

5p b) Să se demonstreze că pentru oricare $X, Y \in \mathcal{M}$, rezultă că $XY \in \mathcal{M}$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $U \in \mathcal{M}$ și $VU = UV$, pentru orice $V \in \mathcal{M}$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideră polinomul $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Știind că $a = 0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

5p b) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.