

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se verifice că $B^2 = 3B$, unde $B^2 = B \cdot B$.

5p b) Să se arate că $mI_3 + nB \in G$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

5p c) Să se arate că dacă $A \in G$ și $A^2 = O_3$, atunci $A = O_3$, unde $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^2 = A \cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

5p a) Să se arate că $f = (X^2 - 6)^2 - 1$.

5p b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

5p c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.