

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a + 4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3 - a)z = 16 \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

5p a) Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p b) Să se arate că tripletul $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.

2. Pe mulțimea \mathbb{Z} se consideră legile de compoziție $x \perp y = x + y + 1$, $x \circ y = ax + by - 1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 2$.

5p a) Să se demonstreze că $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.

5p c) Dacă $a = b = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile (\mathbb{Z}, \perp) și (\mathbb{Z}, \circ) .