

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se verifice că $A^2 = 2I_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Să se determine x real astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.

5p c) Să se demonstreze că $A^4 \cdot X = X \cdot A^4$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$.

5p a) Să se verifice că $3 + 2\sqrt{2} \in G$.

5p b) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p c) Să se arate că orice element din mulțimea G are invers în G în raport cu înmulțirea numerelor reale.