

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $O_3 \in \mathcal{M}$.

5p b) Să se demonstreze că produsul oricăror două matrice din \mathcal{M} este o matrice din \mathcal{M} .

5p c) Știind că $A \in \mathcal{M}$ și $\det(A) = 0$, să se demonstreze că $A^3 = O_3$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Pentru $a = c = 1$ și $b = -1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$.

5p b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$ este X , iar restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este -1 .

5p c) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.