

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.

5p a) Să se determine numerele reale a și b astfel încât $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = I_2$.

5p b) Să se demonstreze că $A \cdot B = A$, unde $B = A^2 - 2I_2$ și $A^2 = A \cdot A$.

5p c) Să se arate că dacă $X \in C(A)$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

5p a) Să se rezolve în G ecuația $x * x = \frac{4}{5}$.

5p b) Să se verifice egalitatea $x * y = \frac{(x+1)(y+1) - (x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1) + (x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x, y \in G$.

5p c) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$ rezultă că $x * y \in G$.