

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, știind că $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ știind că $A \cdot B = I_2$.

5p c) Știind că $A \cdot B = I_2$ să se calculeze $S = (B^{-1} - A)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = 12$.

5p b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.

5p c) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} (x - 3) * y = 2 \\ (x - y) \circ 4 = 10 \end{cases}$$
, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.