

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p c) Să se arate că ecuația $Y^2 = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

5p a) Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

5p b) Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2 = x$, unde $x \in \mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S + P$.

5p c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3 = \hat{0}$.