

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

5p a) Să se arate că  $A = B + I_3$ .

5p b) Să se demonstreze că matricea  $A$  este inversabilă și să se determine  $A^{-1}$ .

5p c) Să se determine numărul real  $a$  astfel încât  $\det(X(a)) = (2a - 1)^3$ , unde  $X(a) = I_3 + aA$ .

2. Pe mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție  $x * y = xy - x - y + 2$ .

5p a) Să se demonstreze că  $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se demonstreze că legea "\*" este asociativă.

5p c) Să se calculeze  $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \dots * \frac{\sqrt{2009}}{2}$ .