

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
, unde a este număr real și matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Pentru $a = 0$ să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = px + y + 2$, cu $p \in \mathbb{Z}$,
 $x \circ y = x + y - 2$ și funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + q$, cu $q \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se determine $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât legea de compoziție "*" să fie comutativă.

5p b) Pentru $p = 1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x * x) \circ (x * x) = x^2 + 2$.

5p c) Pentru $p = 1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcția f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și (\mathbb{Z}, \circ) .