

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}.$$

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se demonstreze că $A^2X = XA^2$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p c) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3 + bA \in G$.

2. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1004} + X^{2009}$, cu forma algebrică

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2009}X^{2009}.$$

5p a) Să se calculeze $f(-1)$.

5p b) Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}$ este un număr întreg par.

5p c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.