

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X^n \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$, unde

$$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Să se verifice că $X^3 = I_3$.

5p b) Să se calculeze $\det(I_3 + X + X^2)$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $Y \in G$, atunci $Y^{-1} \in G$.

2. Se consideră mulțimea $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.

5p a) Să se verifice că $2 + \sqrt{3} \in G$.

5p b) Să se arate că, în raport cu înmulțirea numerelor reale, orice element din mulțimea G are invers în G .

5p c) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.