

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine numărul real x astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$.

5p b) Să se verifice că $A^2 = 4(A - I_2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p c) Să se determine numărul real a astfel încât $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x \circ y = x + y + 3$ și $x * y = xy - 3(x + y) + 12$.

5p a) Să se verifice că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x \circ (x + 1)) + (x * (x + 1)) = 11$.

5p c) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x \circ (y - 1) = 0 \\ (x + 1) * y = x * (y + 1) \end{cases}, \text{ cu } x, y \in \mathbb{R}.$$