

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p b) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$ , pentru orice  $x \in [0, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x + 1$ .

5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

5p c) Să se demonstreze că  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$ .