

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ .

5p a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

5p b) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$ , oricare ar fi  $x \in (0; +\infty) \setminus \{e\}$ .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f + g$ .

5p b) Să se arate că  $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$ .

5p c) Folosind eventual faptul că  $2ab \leq a^2 + b^2$ , pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ , să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$