

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$.

5p b) Să se verifice că $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$.

5p c) Să se arate că șirul care are termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.