

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $\int f_1(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$.