

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ .

**5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**5p** b) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**5p** c) Să se demonstreze că  $f(x) \geq 1$ , pentru orice  $x > -1$ .

2. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră  $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$ .

**5p** a) Să se verifice că  $I_0 = 1$ .

**5p** b) Să se calculeze  $I_1$ .

**5p** c) Folosind, eventual, faptul că  $1 \leq \ln x \leq 2$  oricare ar fi  $x \in [e, e^2]$ , să se demonstreze că

$$1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$