

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$, punct care aparține graficului funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0; +\infty)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se verifice că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.