

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, 2]$.

5p c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e$.