

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

5p c) Să se demonstreze că  $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ , pentru orice  $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_1^e x \left( f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$ .

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .

5p c) Să se verifice că  $\int_1^2 f'(x) f(x) dx = -\frac{22}{81}$ .