

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0,1]$.

5p b) Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0;1]$.

5p c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, pentru orice $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe \mathbb{R} .

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.