

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2; +\infty)$.

5p c) Să se determine a real, $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = a$, să fie egală cu $\ln 3$.